時間領域のモード解析および数値モデル同定解析

－　解析手法　－

株式会社バイブラントシステム開発
Vibrant System Development Co.,Ltd.

〒207-0014　東京都東大和市南街 5-39-16
TEL (FAX)　042-507-2731
E-mail　ando@vsdc.co.jp
URL　http://www.vsdc.co.jp

目　次

1. はじめに

地震観測や振動試験は、土木・建築系や機械系構造物あるいは地盤の動的特性を把握し、その耐震性（あるいは耐振性）を検証するために実施される。構造物の動的特性はモード定数（固有値と固有ベクトル）や諸物性値等により明らかになるが、これらは観測・試験による実測データから逆解析的に決定可能であり、「時間領域のモード解析」および「数値モデル同定解析」はそのための解析手法のひとつである。

「時間領域のモード解析[1)2)3)]」は、観測記録より、対象系が運動方程式に従うことを前提としてモード定数を求め、伝達関数を計算して、系の周波数特性を明らかにすることを目的とする。一方、「数値モデル同定解析[1)2)3)]」は、時間領域のモード解析の結果を参照して系に対して仮定した数値モデルの物性値の同定を目的とする。これら解析には次のような特徴がある。

<u>時間領域のモード解析</u>

① 観測記録より最小二乗法に従い振動系の固有値（固有周波数と減衰定数）および固有ベクトルを求め、伝達関数を計算する。振動系の M、C、K の情報は必要ない。

② 刺激係数の大きいモードから求められ、複雑な周波数特性を有する系についても容易に解析が可能である。

③ 固有値は非線形最小二乗法に従って計算を行うが、収束性にたいへん優れている。

④ 周波数領域で観測値の入力に対する出力のスペクトル比を扱う場合、ノイズレベルの高いデータについてはノイズの解析に及ぼす影響は大きいが、時間領域では入出力の差（加速度入力の場合）や出力自体（外力の場合）を扱うためその影響は小さく良好な結果が期待される。

⑤ 解析は運動方程式で関係付けられる入出力の波形があれば実施可能である。それぞれ複数個でも構わない。ただし、入力が加速度の場合は、一般に刺激係数が不明なため 1 個の入力となる。

<u>数値モデル同定解析</u>

① 観測記録より非線形最小二乗法に従い対象系に対して仮定した数値モデルの物性値を同定する。数値モデルとして FEM モデル（S-R モデルなど質点系モデルを含む）及び一次元波動方程式モデルが使用可能である。

② 同定解析には、解の一意性や発散等、様々な問題が存在する。一般に観測点総数が仮定した対象系の数値モデルの自由度に比較してわずかであるため、正規方程式の係数行列を構成する感度量（微分係数）に対して有意な値を持つ物性値は一部に限られ、同行列が特異になることが主たる要因である。本解析では、この問題に対して特異値分解法を参考にして開発した修正特異値分解法により対処している。

図 1、2 は、構造物の耐震性等の検討用数値モデルの作成を目的とする順解析の流れ図と時間

領域のモード解析および数値モデル同定解析の位置付けを示した逆解析の流れ図である。順解析の場合は応答に対する感度量の小さい物性値の妥当性の判断が難しいが、逆解析では全てのモデル要素の物性値の感度量を計算して修正量を決定しているため問題はない。

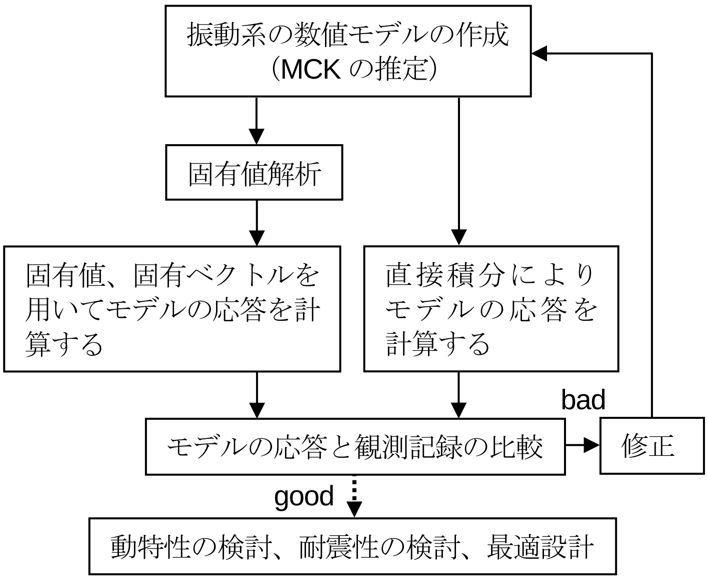

図 1　順解析（シミュレーション解析）の流れ図

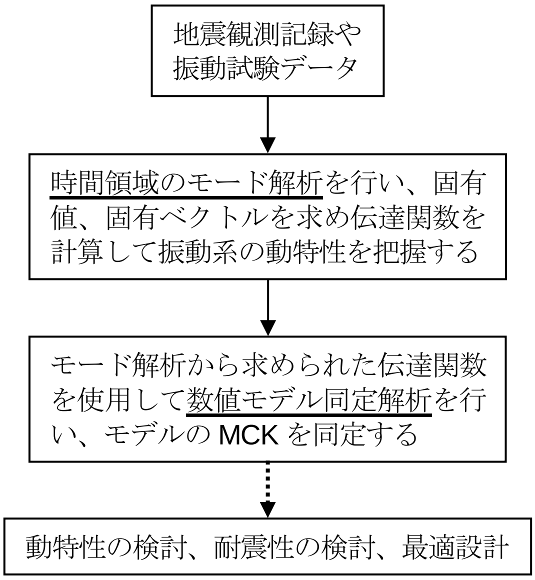

図 2　逆解析の流れ図

2. 時間領域のモード解析

自由度 N の非比例減衰を有する振動系の運動方程式は次式となる。今、対象系の運動がこの方程式に従うことを前提として考えていく（比例減衰の場合も同様の展開となる）。

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(t) \tag{1}$$

ここに、$\boldsymbol{M}$ 、$\boldsymbol{C}$ 及び $\boldsymbol{K}$ は、それぞれ質量、減衰、剛性の $(N\times N)$ 行列であり、$\boldsymbol{x}(t)$ 、$\boldsymbol{f}(t)$ は変位、外力の N 元ベクトルである。入力が加速度であれば外力 $\boldsymbol{f}(t)$ は入力点の加速度による慣性力となり、$\boldsymbol{x}(t)$ は入力点に対する相対変位となる。以下で扱う観測データは入出力ともに加速度である。これらデータの入出力関係は、運動方程式(1)によって定義される。

前述したように、モード解析の目的は観測記録を使用して最小二乗法よりモード定数を求め伝達関数を計算して系の周波数特性を明らかにすることである。そこで、はじめに観測方程式の理論解である運動方程式(1)の解について、2 つのパラメータ固有値と固有ベクトルの陽関数に表現するために対象系の固有値問題を取り上げ、系の基本ベクトルを形成する固有ベクトルの線形展開式について考えていく。

ここで、以下の展開の便宜のために、式(1)を次のように改める。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{f} \end{bmatrix} \tag{2}$$

また、上式を簡略に表現するために次の行列、ベクトルを導入する。

$$\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{X}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{F}(t) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{M} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} & \boldsymbol{x} \end{bmatrix}^T,\ \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{f} \end{bmatrix}^T \tag{4}$$

ここに、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ は $(2N \times 2N)$ の行列、$\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{F}$ は $(2N \times 1)$ のベクトルである。

式(3)の固有値問題は、$\boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{0}$ と置いた閉鎖系において論じられる。このとき解 $\boldsymbol{X}(t)$ を $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{V}\,exp(\lambda t)$ と置けば、式(3)は次の固有方程式へ移行する。

$$\lambda_r \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_r + \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_r = \boldsymbol{0} \quad (r = 1 \sim 2N) \tag{5}$$

ここに、λ_r、$\boldsymbol{V}_r$ は、それぞれ第 r 次の固有値、固有ベクトルであり、ベクトル $\boldsymbol{V}_r$ は次の内容を持つ。

$$\boldsymbol{V}_r = \begin{bmatrix} \lambda_r \boldsymbol{u}_r & \boldsymbol{u}_r \end{bmatrix}^T \tag{6}$$

ここに、ベクトル $\boldsymbol{u}_r$ は、第 r 次変位ベクトルである。

また、式(5)より、ベクトル $\boldsymbol{V}_r$ は次の直交関係式を満たす。

$$\boldsymbol{V}_s{}^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_r = \delta_{sr} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{V}_s{}^T \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_r = -\lambda_r \delta_{sr} \tag{8}$$

ここに、δ はクロネッカーのデルタである。ただし、上式は、いずれかの式により規格化されたベクトル $\boldsymbol{V}_r$ 及び $\boldsymbol{u}_r$ について成立する。

固有方程式(5)を解けば閉鎖系の運動が明らかになる。そして、(7)、(8)両式の直交性を満たす基本ベクトル $\boldsymbol{V}_r$ によって式(3)のベクトル $\boldsymbol{X}(t)$ の線形展開が可能となり次のように表される。

$$\boldsymbol{X}(t) = \sum_{r=1}^{2N} \alpha_r(t) \boldsymbol{V}_r \tag{9}$$

ここに、$\alpha_r(t)$ は第 r 次の展開係数であり、記号 $\sum_r$ はモードの総和を意味する。

変位 $\boldsymbol{x}(t)$、速度 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ および加速度 $\ddot{\boldsymbol{x}}(t)$ は、(4)、(6)の両式から次のようになる。

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum \alpha_r(t) \boldsymbol{u}_r \tag{10}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \sum \alpha_r(t) \lambda_r \boldsymbol{u}_r \tag{11}$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \sum \dot{\alpha}_r(t) \lambda_r \boldsymbol{u}_r \tag{12}$$

展開係数 $\alpha_r(t)$ は、次の微分方程式を満たす。

$$\dot{\alpha}_r(t) - \lambda_r \alpha_r(t) = \boldsymbol{u}_r{}^T \boldsymbol{f}(t) \tag{13}$$

上式は、式(9)を式(3)に代入し、(7)、(8)両式の直交性を考慮して得られる。よって、上式を解けば変位等が求まる。今、問題にしている加速度は、次のようになる。

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = \sum\left\{\lambda_r \alpha_{r0} e^{\lambda_r t} + \boldsymbol{u}_r{}^T \dot{\boldsymbol{\beta}}_r(t)\right\}\lambda_r \boldsymbol{u}_r \tag{14}$$

ここに、$\{\ \}$内の第一項は式(1)の一般解であり、α_{r0} はα_r の初期値である。第二項は式(1)の特殊解であり、ベクトル$\boldsymbol{\beta}_r(t)$ は次の微分方程式を満たす。

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_r(t) = \lambda_r \boldsymbol{\beta}_r(t) + \boldsymbol{f}(t) \tag{15}$$

上式は、式(13)において$\alpha_r(t) = \boldsymbol{u}_r{}^T \boldsymbol{\beta}_r(t)$ と置換し、固有ベクトル$\boldsymbol{u}_r$ の直行性を考慮して得られる。

尚、式(14)は、モード定数λ_r 、$\boldsymbol{u}_r$ の共役複素数を考慮すれば次のようになり、以後、加速度の理論式として取り扱う。

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = 2Real\left[\sum_{r=1}^{N}\left\{\lambda_r \alpha_{r0} e^{\lambda_r t} + \boldsymbol{u}_r{}^T \dot{\boldsymbol{\beta}}_r(t)\right\}\lambda_r \boldsymbol{u}_r\right] \tag{16}$$

ここに、$Real$ は、実数部を意味する。

式(16)の加速度$\ddot{\boldsymbol{x}}(t)$は固有ベクトル$\boldsymbol{u}_r$ による線形展開式であるが、固有値λ_r は$\ddot{\boldsymbol{x}}(t)$に対して非線形の関係にあるため、誤差分布を考慮してこれらパラメータは個別に扱わねばならない。以下に、最小二乗法に従って式(16)の理論値と観測値との間の誤差を評価して固有値λ_r 、固有ベクトル$\boldsymbol{u}_r$ を決定するための手法について述べていく。

2.1　固有ベクトルの決定について

固有ベクトル$\boldsymbol{u}_r$ は、固有値λ_r を既知として扱い、観測点毎に決定する。式(16)より、観測点j の加速度$\ddot{x}_j(t)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \ddot{x}_j(t) &= 2Real\left[\sum_{r=1}^{N}\left\{\lambda_r \alpha_{r0} e^{\lambda_r t} + \boldsymbol{u}_r{}^T \dot{\boldsymbol{\beta}}_r(t)\right\}\lambda_r u_{rj}\right] \\ &= 2Real\left[\sum_{r=1}^{N}\left\{\lambda_r{}^2 \alpha_{r0} e^{\lambda_r t} u_{rj} + \boldsymbol{u}_r{}^T\left(\lambda_r{}^2 \boldsymbol{\beta}_r(t) + \lambda_r \boldsymbol{f}(t)\right)u_{rj}\right\}\right] \end{aligned} \tag{17}$$

上式で一義的に決定不可能な複数の未知線形量をまとめ、変数変換$a_{rj} = \alpha_{r0} u_{rj}$ 、$\boldsymbol{U}_{rj} = u_{rj}\boldsymbol{u}_r$ を行う。これより、理論解（回帰式）は次のようになる。

$$\ddot{x}_{ij} = 2Real\left[\sum_{r=1}^{N}\left\{\lambda_r{}^2 e^{\lambda_r t_i} a_{rj} + \boldsymbol{U}_{rj}{}^T\left(\lambda_r{}^2 \boldsymbol{\beta}_r(t_i) + \lambda_r \boldsymbol{f}(t_i)\right)\right\}\right] \tag{18}$$

ここに、$\ddot{x}_{ij}$ は時間$t = t_i$ 時の観測点j の加速度である。

新たなパラメータa_{rj} および$\boldsymbol{U}_{rj}$ は観測値$\ddot{x}_{ij}{}^e$ と理論解式(18)間の誤差を評価して求められる。誤差評価関数ε_j は次のようになる。

$$\varepsilon_j = \sum_i\left[\ddot{x}_{ij}{}^e - 2Real\left[\sum_{r=1}^{N}\left\{\lambda_r{}^2 e^{\lambda_r t_i} a_{rj} + \boldsymbol{U}_{rj}{}^T\left(\lambda_r{}^2 \boldsymbol{\beta}_r(t_i) + \lambda_r \boldsymbol{f}(t_i)\right)\right\}\right]\right]^2 \tag{19}$$

パラメータa_{rj} および$\boldsymbol{U}_{rj}$ は、誤差の最小化条件式$\partial\varepsilon_j / \partial a_{rj} = 0$ 、$\partial\varepsilon_j / \partial \boldsymbol{U}_{rj} = \boldsymbol{0}$ より正規方程式をたて、これを解いて求められる。

2.2　固有値の決定について

固有値 λ_r は、固有ベクトル $\boldsymbol{u}_r$ を既知として扱い、決定する。はじめに、加速度 $\ddot{\boldsymbol{x}}(t)$ に対して非線形の関係にある固有値 λ_r の微小変化分 $\Delta\lambda_r$ について $\ddot{\boldsymbol{x}}(t)$ をテーラーの定理で展開し、その一次までとって線形化を行う。即ち、時間 $t = t_i$ 時の観測点 j の加速度 $\ddot{x}_{ij}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{ij} &= \ddot{x}_{ij0} + \sum_{r=1}^{2N} \frac{\partial \ddot{x}_{ij}}{\partial \lambda_r} \Delta\lambda_r \\ &= \ddot{x}_{ij0} + 2Real\left[\left[\sum_{r=1}^{N}\left\{\left(2\lambda_r + \lambda_r^2 t_i\right)e^{\lambda_r t_i} a_{rj} + \boldsymbol{U}_{rj}^T\left(2\lambda_r \boldsymbol{\beta}_r(t_i) + \lambda_r^2 \frac{\partial \boldsymbol{\beta}_r}{\partial \lambda_r} + \boldsymbol{f}(t_i)\right)\right\}\right]\Delta\lambda_r\right]\end{aligned} \tag{20}$$

ここに、$\ddot{x}_{ij0}$ は固有値が λ_r の時の加速度である。

$\Delta\lambda_r$ は観測値 $\ddot{x}_{ij}^e$ と上式間の誤差を評価して求められる。即ち、誤差評価関数は次のようになるが、誤差の最小化条件式 $\partial\varepsilon / \partial\Delta\lambda_r = 0$ より正規方程式をたて、これを解いて求められる。

$$\varepsilon = \sum_{ij}\left(\ddot{x}_{ij}^e - \ddot{x}_{ij}\right)^2 \tag{21}$$

誤差を評価して求められた $\Delta\lambda_r$ より λ_r を修正し、誤差 ε が許容値を満たすまで演算を繰り返す。

3. 伝達関数について

伝達関数はモード解析の結果より解析的に求められる。

今、式(3)のベクトル $\boldsymbol{X}(t)$、外力 $\boldsymbol{F}(t)$ のフーリエスベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{Y}(\omega)$、$\boldsymbol{G}(\omega)$ とすれば、同式の両辺をフーリエ変換して次式を得る。

$$i\omega \boldsymbol{AY}(\omega) + \boldsymbol{BY}(\omega) = \boldsymbol{G}(\omega) \tag{22}$$

ここに、ω は角振動数であり、i は虚数単位である。

ここで次式のように、上式のベクトル $\boldsymbol{Y}(\omega)$ の固有ベクトル $\boldsymbol{V}_r$ による線形展開式を考える。

$$\boldsymbol{Y}(\omega) = \sum_r \alpha_r(\omega)\boldsymbol{V}_r \tag{23}$$

展開係数 $\alpha_r(\omega)$ は、上式を式(22)へ代入して直交性(7)、(8)の両式を考慮すれば求められ、$\boldsymbol{Y}(\omega)$、そして(4)、(6)の両式より変位 $\boldsymbol{x}(t)$ のフーリエスペクトル $\boldsymbol{y}(\omega)$ は次のようになる。

$$\boldsymbol{Y}(\omega) = \sum_r \frac{\boldsymbol{u}_r^T \boldsymbol{g}(\omega)}{i\omega - \lambda_r}\boldsymbol{V}_r \tag{24}$$

$$\boldsymbol{y}(\omega) = \sum_r \frac{\boldsymbol{u}_r^T \boldsymbol{g}(\omega)}{i\omega - \lambda_r}\boldsymbol{u}_r \tag{25}$$

ここに、$\boldsymbol{g}(\omega)$ は、外力 $\boldsymbol{f}(t)$ のフーリエスベクトルである。ただし、モード解析では固有ベクト

ル$\boldsymbol{u}_r$に換えて$\boldsymbol{U}_{rj}=u_{rj}\boldsymbol{u}_r$（$j$は観測点を指す）を計算しており、実際には次式により$\boldsymbol{y}(\omega)$の観測点j成分$y_j(\omega)$を計算している。

$$y_j(\omega)=\sum_r \frac{\boldsymbol{U}_{rj}{}^T\boldsymbol{g}(\omega)}{i\omega-\lambda_r} \tag{26}$$

ところで、地震波（加速度入力）の場合は、伝達関数は対象点の絶対値（加速度、速度及び変位の各絶対値）を基準点の絶対値で割って作成されるが、今、基準点の絶対変位$x_b(t)$のフーリエスペクトルを$y_b(\omega)$とすれば伝達関数$T_j(\omega)$は次のようになる。

$$T_j(\omega)=\left[\sum_r \frac{\boldsymbol{U}_{rj}{}^T\boldsymbol{g}(\omega)}{i\omega-\lambda_r}+y_b(\omega)\right]/\,y_b(\omega) \tag{27}$$

ここに、$\boldsymbol{g}(\omega)$は慣性力$-\boldsymbol{MI}\ddot{x}_b(t)$のフーリエスペクトルであり、次のようになる。

$$\boldsymbol{g}(\omega)=\omega^2\boldsymbol{MI}y_b(\omega) \tag{28}$$

ここに、$\boldsymbol{I}$は単位ベクトルである。これより式(27)の伝達関数$T_j(\omega)$は次のように表される。

$$T_j(\omega)=\sum_r \frac{\omega^2\boldsymbol{U}_{rj}{}^T\boldsymbol{MI}}{i\omega-\lambda_r}+1 \tag{29}$$

ところで質量行列$\boldsymbol{M}$は、刺激係数$\boldsymbol{u}_r{}^T\boldsymbol{MI}$として上式及び式(3)の$\boldsymbol{u}_r{}^T\boldsymbol{f}(t)$（$=-\boldsymbol{u}_r{}^T\boldsymbol{MI}\ddot{x}_b(t)$）に現れるが、この係数は系の定数であり、$\boldsymbol{M}$単独では任意の値を採り得る。つまり、本解析から算出される$\boldsymbol{U}_{rj}$は適当な$\boldsymbol{M}$に応じた値となり、刺激関数$\boldsymbol{U}_{rj}{}^T\boldsymbol{MI}=\boldsymbol{u}_r{}^T\boldsymbol{MI}u_{rj}$は、$\boldsymbol{M}$に依らず普遍的な量である。このことは$\boldsymbol{U}_{rj}$から計算される固有ベクトル$\boldsymbol{u}_r$については、数値的な評価は難しいことを意味する。固有ベクトルは、式(7)あるいは(8)によって規格化されて初めて評価される量であり、少なくとも連続体の数値モデルの自由度に相当するだけの個数がなければ無意味である。ただ、解析より求められる$\boldsymbol{U}_{rj}$より、適切に規格化すれば対象系のモード形状は確認可能である。

4. 数値モデル同定解析

時間領域のモード解析は観測記録による対象系のモード定数の同定を目的とするが、数値モデル同定解析は、更に溯って観測記録より運動方程式(1)の系定数、即ち、質量$\boldsymbol{M}$、減衰係数$\boldsymbol{C}$および剛性$\boldsymbol{K}$の各行列の同定を目的とする。具体的には、予め対象系に対して仮定した運動方程式（数値モデル）の解と観測値との間の誤差を評価して系定数を構成する物性値に修正を加えるという方法を採る。解析は周波数領域で行い、観測値として時間領域のモード解析から求められる伝達関数を使用する。

観測値に当たる伝達関数$T_j{}^e(\omega)$の式(29)を再掲する。

$$T_j^e(\omega)=\sum_r \frac{\omega^2 \boldsymbol{U}_{rj}{}^T \boldsymbol{MI}}{i\omega-\lambda_r}+\boldsymbol{1} \tag{30}$$

一方、運動方程式(1)の解$\boldsymbol{T}(\omega)$は次のようになる（以下では、外力が慣性力の場合について取り上げるが、通常の外力の場合も同様の展開となる)。

$$\boldsymbol{T}(\omega)=\sum_r \frac{\omega^2 \boldsymbol{u}_r{}^T \boldsymbol{MI}}{i\omega-\lambda_r}\boldsymbol{u}_r+\boldsymbol{I} \tag{31}$$

物性値の修正量は観測値と理論値間の誤差の二乗和を評価して求められる。このとき誤差評価関数は次式である。

$$\varepsilon=\sum_{ij}\left(\overline{T}_{ij}{}^e-\overline{T}_{ij}\right)\left(T_{ij}{}^e-T_{ij}\right) \tag{32}$$

ここに、$T_{ij}{}^e$ は角振動数ω_iにおける観測点 j の観測値であり、T_{ij} は理論値である。また、$\overline{T}_{ij}{}^e$ 、$\overline{T}_{ij}$ は、それぞれ、$T_{ij}{}^e$ 、T_{ij} の共役複素数である。そして、記号$\sum$ は対象振動数範囲及び観測点についての総和を意味する。

次に、式(31)の伝達関数$\boldsymbol{T}(\omega)$は物性値に対して非線形の関係にあるため、テーラーの定理に従い物性値修正量の一次までとって線形化を行い、最適修正量の計算手法を考えていく。

各種物性値をベクトル $\boldsymbol{p}$ の成分で表し、その修正量を $\Delta\boldsymbol{p}$ として伝達関数$\boldsymbol{T}(\omega)$を次のように表す。

$$\boldsymbol{T}(\omega,\boldsymbol{p})\approx\boldsymbol{T}(\omega,\boldsymbol{p_0})+\sum_n \frac{\partial \boldsymbol{T}(\omega,\boldsymbol{p_0})}{\partial p_n}\Delta p_n \tag{33}$$

ここに、 $\boldsymbol{p_0}$ は、はじめに仮定した物性値である。また、p_n 、Δp_n は、それぞれベクトル $\boldsymbol{p}$ 、$\Delta\boldsymbol{p}$ の第 n 成分である。

上式の $\Delta\boldsymbol{p}$ は、これをパラメータとして直接計算可能であるが、ここでは固有方程式(5)を介在させて固有値問題で引用される近似法、即ち、摂動法[4]を利用した計算手法を考えていく。このとき $\Delta\boldsymbol{p}$ は、予め予想される修正量として与えられ、既知量の扱いとなる。いわゆる摂動であるが、第 2 項全体は $\Delta\boldsymbol{p}$ による伝達関数の一次摂動 $\Delta\boldsymbol{T}(\omega)$ である。従って、$\Delta\boldsymbol{T}(\omega)$ を物性値毎に計算して次式のように線形展開の形に表現し、ε の最小化を条件に展開係数を計算すれば最適な伝達関数の一次摂動、即ち、伝達関数の修正量が求められる。

$$\boldsymbol{T}(\omega,\boldsymbol{p})\approx\boldsymbol{T}(\omega,\boldsymbol{p_0})+\sum_{n=1}^{N} a_n \frac{\partial \boldsymbol{T}(\omega,\boldsymbol{p_0})}{\partial p_n}\Delta p_n \tag{34}$$

ここに、a_n は n 番目の物性値成分 p_n の摂動 Δp_n による伝達関数一次摂動 $\Delta\boldsymbol{T}_n(\omega)=\partial\boldsymbol{T}/\partial\boldsymbol{p}_n$ ・$\Delta\boldsymbol{p}_n$ の展開係数である。$\sum$ は、物性値の個数 N 個の総和を意味する。

伝達関数の一次摂動は、以下のようになる。

伝達関数$\boldsymbol{T}(\omega)$は、式(31)よりモード定数λ_r、$\boldsymbol{u}_r$の関数であるから、$\Delta\boldsymbol{T}_n(\omega)$は次のようになる。

$$\Delta\boldsymbol{T}_n(\omega)=\sum_r\left(\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial\lambda_r}\frac{\partial\lambda_r}{\partial p_n}+\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial\boldsymbol{u}_r}\frac{\partial\boldsymbol{u}_r}{\partial p_n}\right)\Delta p_n \tag{35}$$

上式の伝達関数$\boldsymbol{T}$の固有値λ_rおよび固有ベクトル$\boldsymbol{u}_r$による偏微分$\partial\boldsymbol{T}/\partial\lambda_r$、$\partial\boldsymbol{T}/\partial\boldsymbol{u}_r$は次のようになる。

$$\partial\boldsymbol{T}/\partial\lambda_r=\frac{\omega^2\boldsymbol{u}_r{}^T\boldsymbol{MI}}{(i\omega-\lambda_r)^2}\boldsymbol{u}_r \tag{36}$$

$$\partial\boldsymbol{T}/\partial\boldsymbol{u}_r=\frac{\omega^2\boldsymbol{u}_r{}^T\boldsymbol{MI}}{i\omega-\lambda_r}\boldsymbol{I} \tag{37}$$

また、$\Delta\lambda_r=\partial\lambda_r/\partial p_n\cdot\Delta p_n$、$\Delta\boldsymbol{u}_r=\partial\boldsymbol{u}_r/\partial p_n\cdot\Delta p_n$は、それぞれ固有値、固有ベクトルの$\Delta p_n$による一次摂動であるが、これらは式(5)の固有方程式を利用して以下に示す摂動法に従って算出される。

固有方程式及び固有ベクトルの直交関係式を再掲する。

$$\lambda_r\boldsymbol{AV}_r+\boldsymbol{BV}_r=\boldsymbol{0} \tag{38}$$

$$\boldsymbol{V}_s{}^T\boldsymbol{AV}_r=\delta_{sr} \tag{39}$$

$$\boldsymbol{V}_s{}^T\boldsymbol{BV}_r=-\lambda_r\delta_{sr} \tag{40}$$

今、物性値の摂動Δp_nによって固有方程式の解が次のように変動したとする。

$$\lambda'_r=\lambda_r+\Delta\lambda_r \tag{41}$$

$$\boldsymbol{V}'_r=\boldsymbol{V}_r+\Delta\boldsymbol{V}_r \tag{42}$$

ここに、上２式の右辺第二項は物性値の摂動Δp_nによる一次摂動である。

これらを固有方程式(38)へ代入して次式を得る。

$$(\lambda_r+\Delta\lambda_r)(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}_n)(\boldsymbol{V}_r+\Delta\boldsymbol{V}_r)+(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B}_n)(\boldsymbol{V}_r+\Delta\boldsymbol{V}_r)=0 \tag{43}$$

ここに、$\Delta\boldsymbol{A}_n$、$\Delta\boldsymbol{B}_n$はn番目の物性値摂動Δp_nによって変動した行列である。

上式を展開して式(38)を考慮すれば次のようになる。ただし、式(34)で伝達関数の一次摂動までを問題にしているのでΔ量については二次以降を無視する。

$$\lambda_r\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{V}_r+\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{V}_r+\Delta\lambda_r\boldsymbol{AV}_r+\lambda_r\Delta\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{V}_r+\Delta\boldsymbol{B}_n\boldsymbol{V}_r=0 \tag{44}$$

ここで、$\Delta\boldsymbol{V}_r$についてα_{rl}を展開係数として固有ベクトル$\boldsymbol{V}_r$の線形展開式を考える。

$$\Delta\boldsymbol{V}_r=\sum_l\alpha_{rl}\boldsymbol{V}_l \tag{45}$$

上式を式(44)に代入して左側から$\boldsymbol{V}_s{}^T$を掛け、$\boldsymbol{V}_r$の直交性を考慮すれば以下のようになる。

$$\sum_l \alpha_{rl}\lambda_r \boldsymbol{V}_s^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_l + \sum_l \alpha_{rl}\boldsymbol{V}_s^T \boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_l + \Delta\lambda_r \boldsymbol{V}_s^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_r + \lambda_r \boldsymbol{V}_s^T \Delta\boldsymbol{A}_n \boldsymbol{V}_r + \boldsymbol{V}_s^T \Delta\boldsymbol{B}_n \boldsymbol{V}_r = 0 \tag{46}$$

直交性(39)、(40)より、上式は次のようになり、展開係数α_{rs}及び$\Delta\lambda_r$が求められる。

即ち、

$$\alpha_{rs}\lambda_r - \alpha_{rs}\lambda_s + \Delta\lambda_r \delta_{sr} + \boldsymbol{V}_s^T(\lambda_r \Delta\boldsymbol{A}_n + \Delta\boldsymbol{B}_n)\boldsymbol{V}_r = 0 \tag{47}$$

上式で$r = s$のとき、

$$\Delta\lambda_r = -\boldsymbol{V}_r^T(\lambda_r \Delta\boldsymbol{A}_n + \Delta\boldsymbol{B}_n)\boldsymbol{V}_r \tag{48}$$

$r \neq s$のとき、

$$\alpha_{rs} = -\frac{\boldsymbol{V}_s^T(\lambda_r \Delta\boldsymbol{A}_n + \Delta\boldsymbol{B}_n)\boldsymbol{V}_r}{\lambda_r - \lambda_s} \tag{49}$$

展開係数α_{rr}は式(39)の直交性を利用して求められる。

式(39)は物性値の摂動Δp_nによって次のようになる。

$$(\boldsymbol{V}_s + \Delta\boldsymbol{V}_s)^T(\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A}_n)(\boldsymbol{V}_r + \Delta\boldsymbol{V}_r) = \delta_{sr} \tag{50}$$

上式を展開してΔ量について一次まで取り上げれば次のようになる。

$$\boldsymbol{V}_s^T \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{V}_r + \boldsymbol{V}_s^T \Delta\boldsymbol{A}_n \boldsymbol{V}_r + \Delta\boldsymbol{V}_s^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_r = 0 \tag{51}$$

$\Delta\boldsymbol{V}_r$に対して固有ベクトル$\boldsymbol{V}_r$の線形展開式(45)を代入して次式を得る。

$$\sum_l \alpha_{rl}\boldsymbol{V}_s^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_l + \sum_l \alpha_{sl}\boldsymbol{V}_r^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_l + \boldsymbol{V}_s^T \Delta\boldsymbol{A}_n \boldsymbol{V}_r = 0 \tag{52}$$

$\boldsymbol{V}_r$の直交性より、上式は次のようになる。

$$\alpha_{rs} + \alpha_{sr} + \boldsymbol{V}_s^T \Delta\boldsymbol{A}_n \boldsymbol{V}_r = 0 \tag{53}$$

これより、α_{rr}は次のようになる。

$$\alpha_{rr} = -\frac{\boldsymbol{V}_r^T \Delta\boldsymbol{A}_n \boldsymbol{V}_r}{2} \tag{54}$$

以上より、物性値の摂動Δp_nによる固有値及び固有ベクトルの一次摂動が求められ、伝達関数の一次摂動式(35)の計算が可能となる。

ところで、式(4)、(6)より、行列と固有ベクトルの表現を改めれば、$\Delta\lambda_r$及び$\Delta\boldsymbol{u}_r$は以下のようになる。

$$\Delta\lambda_r = -\boldsymbol{u}_r^T\left(\lambda_r^2 \Delta\boldsymbol{M}_n + \lambda_r \Delta\boldsymbol{C}_n + \Delta\boldsymbol{K}_n\right)\boldsymbol{u}_r \tag{55}$$

$$\Delta\boldsymbol{u}_r = \sum_s \alpha_{rs}\boldsymbol{u}_s \tag{56}$$

$$\alpha_{rs} = -\frac{\boldsymbol{u}_s{}^T\left(\lambda_r{}^2 \Delta\boldsymbol{M}_n + \lambda_r \Delta\boldsymbol{C}_n + \Delta\boldsymbol{K}_n\right)\boldsymbol{u}_r}{\lambda_r - \lambda_s} \quad (r \neq s) \tag{57}$$

$$\alpha_{rr} = -\frac{\boldsymbol{u}_r{}^T\left(2\lambda_r \Delta\boldsymbol{M}_n + \Delta\boldsymbol{C}_n\right)\boldsymbol{u}_r}{2} \tag{58}$$

ここに、$\Delta\boldsymbol{M}_n$ 、$\Delta\boldsymbol{C}_n$ 及び $\Delta\boldsymbol{K}_n$ は、Δp_n によって変動した質量、減衰及び剛性行列である。これらは Δp_n について線形の関係にあるとは限らないので、次のように Δp_n の一次式で表した量として計算される。

$$\Delta\boldsymbol{M}_n = \frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial p_n}\Delta p_n \ , \ \Delta\boldsymbol{C}_n = \frac{\partial\boldsymbol{C}}{\partial p_n}\Delta p_n \ , \ \Delta\boldsymbol{K}_n = \frac{\partial\boldsymbol{K}}{\partial p_n}\Delta p_n \tag{59}$$

数値モデルが FEM の場合は、$\Delta\boldsymbol{M}_n$ 、$\Delta\boldsymbol{C}_n$ 及び $\Delta\boldsymbol{K}_n$ は、パラメータ p_n に関係する要素の要素マトリックスを p_n について微分して偏微分係数 $\partial\boldsymbol{M}/\partial p_n$ 、$\partial\boldsymbol{C}/\partial p_n$ 及び $\partial\boldsymbol{K}/\partial p_n$ を計算し、摂動 Δp_n を乗じて求められる。

ところで、式(34)の展開係数 a_n は、伝達関数一次摂動 $\Delta\boldsymbol{T}_n(\omega)$ を物性値の摂動 Δp_n の一次式で計算しているので Δp_n の係数として式(32)の ε を最小とする摂動を与える。従って、それらが物性値の修正量 δp_n となり、p_{n0} に加算され、更新される。即ち、

$$\delta p_n = a_n \Delta p_n \ , \ p_n = p_{n0} + \delta p_n \quad (n = 1 \sim N) \tag{60}$$

以上、誤差の二乗和あるいは物性値修正量 δp_n の変化率が所定の値以下になるまで、式(31) $\boldsymbol{T}(\omega)$ →式(35) $\Delta\boldsymbol{T}(\omega)$ → a_n →式(60) δp_n 及び p_n を繰り返す。

参考文献）

1) 安藤幸治・岩楯敞広 : 時間領域のモード解析による振動系の動的特性の同定とその適用、土木学会論文集、No.450/Ⅰ-20、pp.151～160、1992.7

2) 安藤幸治，岩楯敞広，小田義也 : 数値モデル同定解析手法とその適用，機械学会年次大会，2011.9

3) 岩楯敞広，内藤伸幸，安藤幸治、小田義也 : 東北地方太平洋地震による逗子地域の表層地盤の地震応答特性，土木学会論文集 A1 特集号地震工学論文集 Vol.33，2014.6

4) 寺沢寛一編 : 数学概論応用編、岩波書店