

時間領域の実稼動モード解析

－ 解析手法および解析例 －

株式会社バイブラントシステム開発

Vibrant System Development Co.,Ltd.

〒207-0014 東京都東大和市南街 5-39-16

TEL (FAX) 042-507-2731

E-mail ando@vsdc.co.jp

URL <http://www.vsvc.co.jp>

目 次

1. はじめに	1
2. 時間領域の実稼働モード解析	1
3. 伝達関数について	2
4. 時間領域の実稼働モード解析の適用	3
5. おわりに	15

1. はじめに

振動試験や地震観測は、機械系あるいは土木・建築系構造物の動的特性を把握し、その耐振性を検証するために実施されます。振動系の動的特性は、モード定数（固有値と固有ベクトル）や諸物性値等により明らかになりますが、これらは観測・試験の結果から逆解析的に決定可能であり、一般的な解析手法として構造物に対する外力およびその応答を使用して行われる「時間領域のモード解析^{1) 2) 3)}」などがあります。ただし、橋梁や超高層ビル等の一部の大型構造物あるいは搭載エンジンや路面を振動源とする場合の車両のように構造物に対する作用を外力として直接計測することが難しい場合は伝達関数の信頼性が低くなり、通常の解析手法で動的特性を把握するのは困難になります。そこで出力のみを使用して動的特性を検討するための解析手法、いわゆる実稼動モード解析が開発され、普及しつつあります。従来の代表的な解析法として FDD 法⁴⁾ があります。同法は応答のパワースペクトルを特異値分解して同定する方法ですが、実構造物について想定される数値モデルの自由度と各節点の自由度に対応する観測点の総数が同数のときは良い結果が期待されるものの、観測点総数が少ない場合は本来のモード定数の同定は不可能です。一般に、想定される数値モデルの自由度分の観測記録を用意するのは物理的に困難であり、同法の適用可能な構造物は限定されます。

以下に、弊社で開発した「時間領域の実稼動モード解析手法」について述べ、その適用例を紹介します。他の手法との大きな違いは、最小二乗法により振動系のモード定数だけでなく外力をもパラメータとして処理する点にあります。これより、例えば、走行中の自動車の路面から受ける外力が車体振動の計測記録より推定可能となります。

2. 時間領域の実稼動モード解析⁵⁾

時間領域の実稼動モード解析の目的は、観測加速度応答記録（出力）を使用して最小二乗法に従い、モード定数および外力を求め、伝達関数を計算して、系の周波数特性を明らかにすることにあります。

自由度 N の非比例減衰を有する振動系の運動方程式は次式のようにになります。今、対象系の運動がこの方程式に従うことを前提として考えていきます（比例減衰の場合も同様に処理可能です）。

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

ここに、 M 、 C 及び K はそれぞれ質量、減衰、剛性の $(N \times N)$ 行列であり、 $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{f}(t)$ はそれぞれ変位、外力の N 元ベクトルです。

未知量の外力 $\mathbf{f}(t)$ は、次のように有限な三角級数で定義します。パラメータの係数ベクトル \mathbf{a}_i 、 \mathbf{b}_i は、外力ベクトル $\mathbf{f}(t)$ に対応させて複数の外力の同時入力を想定しています。

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{i=1}^{n/2} (\mathbf{a}_i \cos \omega_i t + \mathbf{b}_i \sin \omega_i t) \quad (2)$$

ここに、 ω_i 、 n は、それぞれ角周波数およびデータ数です。

運動方程式(1)の解は次のようになります。

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{r=1}^{2N} \left(\lambda_r \alpha_{r0} e^{\lambda_r t} + \mathbf{u}_r^T \dot{\boldsymbol{\beta}}_r(t) \right) \lambda_r \mathbf{u}_r \quad (3)$$

ここに、 λ_r 、 \mathbf{u}_r は、第 r 次の固有値、固有ベクトルです。()内の第一項は式(1)の一般解であり、 α_{r0} は変位 $\mathbf{x}(t)$ を固有ベクトル \mathbf{u}_r で展開したときの展開係数の初期値です。第2項は式(1)の特殊解であり、ベクトル $\boldsymbol{\beta}_r(t)$ は次の微分方程式を満たします。

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_r(t) = \lambda_r \boldsymbol{\beta}_r(t) + \mathbf{f}(t) \quad (4)$$

尚、式(3)は、モード定数 λ_r 、 \mathbf{u}_r の共役複素数を考慮すれば次のようになります。

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = 2\text{Real} \left[\sum_{r=1}^N \left(\lambda_r \alpha_{r0} e^{\lambda_r t} + \mathbf{u}_r^T \dot{\boldsymbol{\beta}}_r(t) \right) \lambda_r \mathbf{u}_r \right] \quad (5)$$

ここに、*Real*は実数部を意味します。 $\boldsymbol{\beta}_r(t)$ は式(2)を式(4)に代入して解析的に求められます。

パラメータのモード定数 λ_r 、 \mathbf{u}_r および外力 $\mathbf{f}(t)$ の \mathbf{a}_i 、 \mathbf{b}_i は、次の観測加速度応答記録と式(5)との間の誤差を評価して求められます。

$$\varepsilon = \sum_{ij} \left(\ddot{x}_{ji}^e - \ddot{x}_{ji} \right)^2 \quad (6)$$

ここに、 \ddot{x}_{ji}^e は観測点 j の時間 $t = t_j$ における観測値です。

計算の具体的な流れは次のようになります。

式(5)の加速度 $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ は固有ベクトル \mathbf{u}_r による線形展開式ですが、固有値 λ_r は $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ に対して非線形の関係に、外力のフーリエ係数 \mathbf{a}_i 、 \mathbf{b}_i は線形の関係にあるため、これらパラメータは個別に扱わねばなりません。特に、非線形パラメータの固有値 λ_r は、加速度 $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ に対して固有値 λ_r の微小変化分 $\Delta\lambda_r$ についてテーラーの定理で展開し、その一次までとって線形化を行い、 $\Delta\lambda_r$ の最適解 $\delta\lambda_r$ を計算して修正されます。もし、正規方程式に特異性が発生した場合は修正特異値分解法^{6) 7)}により対処します。

図1に流れ図を示します。はじめに、固有値 λ_r 、固有ベクトル \mathbf{u}_r の初期値を与え、フーリエ係数 \mathbf{a}_i 、 \mathbf{b}_i を計算します。次に、固有値 λ_r の修正量 $\delta\lambda_r$ 、そして固有ベクトル \mathbf{u}_r を求め、式(6)の誤差が許容値を満たすまで演算を繰り返します。

3. 伝達関数について

伝達関数 $\mathbf{y}(\omega)$ は、実稼動モード解析より求められるモード定数 λ_r 、 \mathbf{u}_r を使用して次式より算出されます。

$$\mathbf{y}(\omega) = \sum_r \frac{\mathbf{u}_r^T \mathbf{g}}{i\omega - \lambda_r} \mathbf{u}_r \quad (7)$$

ここに、 \mathbf{g} は、外力が作用する観測点に1.0を、他の点に0.0を要素に持つベクトルであり、 i は虚数単位です。

ただし、実稼動モード解析では固有ベクトル \mathbf{u}_r に代えて $\mathbf{U}_{ij} = \mathbf{u}_{rj} \mathbf{u}_r$ (j は観測点を指します)を計算しており、実際には次式により $\mathbf{y}(\omega)$ の観測点 j 成分 $y_j(\omega)$ を計算しています。

$$y_j(\omega) = \sum_r \frac{\mathbf{u}_{rj}^T \mathbf{g}}{i\omega - \lambda_r} \quad (8)$$

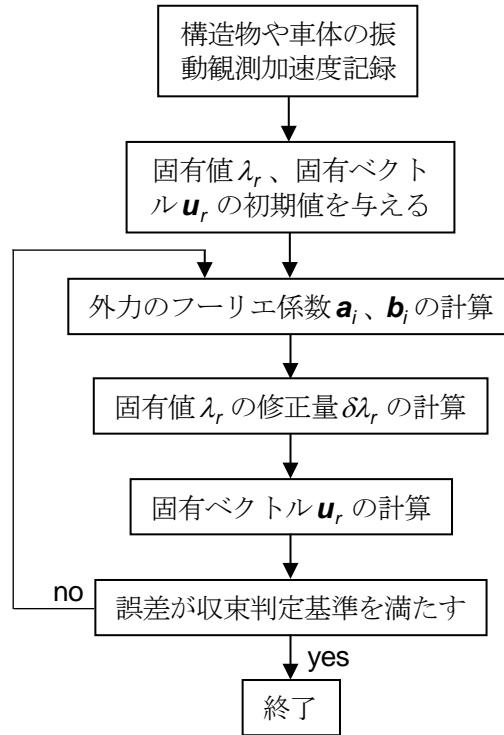


図1 実験モード解析の流れ図

4. 時間領域の実験モード解析の適用—ステンレス鋼板の振動試験記録に対する適用例

振動試験²⁾で対象としたステンレス鋼板 (SUS 板) は長辺 30cm, 短辺 20cm, 厚さ 0.3cm の長方形板です。図2に SUS 板を示します。試験は、SUS 板を長辺方向両端から 2.5cm の位置を床面に平行にゴムひもで支持し、板の四隅 (図2の MP1、MP13、MP105、MP117) に加速度センサーを接着してその内の一隅 (MP1) をインパクトハンマーで加振することにより実施しました。ただし、時間領域の実験モード解析は加速度応答のみを使用して行い、インパクトハンマーによる外力は解析結果を検証する際に参照しました。

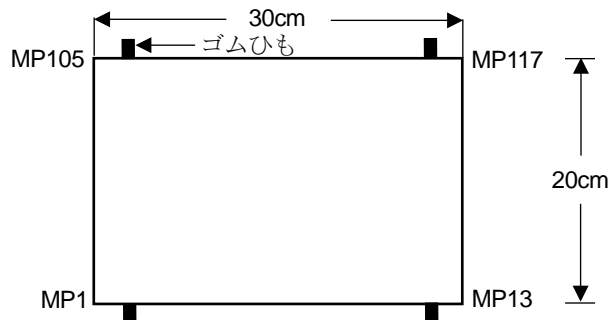


図2 振動試験で対象とした SUS 板

解析は観測点 4 点の内比較的良好な 2 個の記録 MP1 と MP117 の加速度応答 z 成分（板面垂直方向）を使用しました。解析ではパラメータとして固有値と固有ベクトルの他に個数の多い外力のフーリエ係数を扱うため正規方程式の特異性を考慮して記録に対してバンドパスフィルター（BPF）を掛け、パラメータ数を抑えて実施しました。

解析で対象とした加速度記録を図 3 に示します。サンプリング周波数は 1024Hz です。解析では 512 個のデータを使用しました。解析より求められた固有周波数および減衰定数を表 1 に示します。同表に示した従来の時間領域のモード解析結果に比較してほぼ同値です。

以下に、モード毎に解析結果について述べていきます。

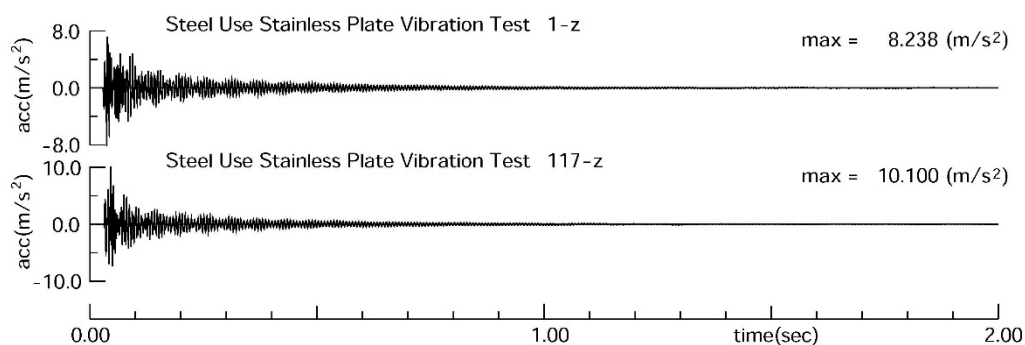


図 3 加速度記録

表 1 固有周波数および減衰定数

No.	時間領域の実稼動モード解析		時間領域のモード解析	
	固有周波数(Hz)	減衰定数(%)	固有周波数(Hz)	減衰定数(%)
1	146.77	0.30	146.80	0.31
2	164.29	0.82	164.34	0.65
3	342.22	0.72	342.12	0.71
4	378.57	1.22	377.27	1.19

(1) 第 1 次モード : BPF が 130Hz~160Hz の場合

解析から求められた固有周波数および減衰定数は表 1 の No.1 の値です。第 1 次モードによる加速度応答波形を計測された波形とともに図 4-1、2 に示します。双方はほぼ一致しています。推定された外力の波形と実際に計測された波形との比較図は図 4-3 のようになり、結果は良好です。図 4-4、5 に示した伝達関数も解析対象範囲内で良く再現されています。

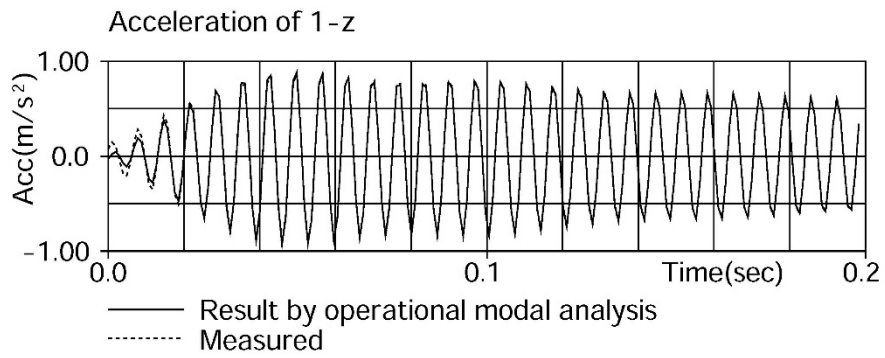


図 4-1 MP1-z の加速度応答の比較

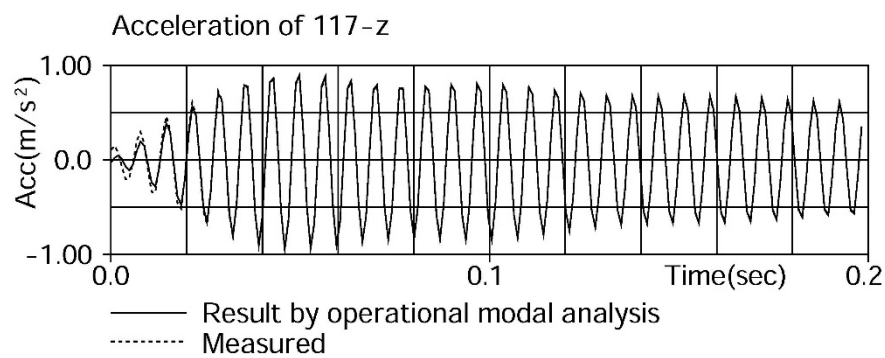


図 4-2 MP117-z の加速度応答の比較

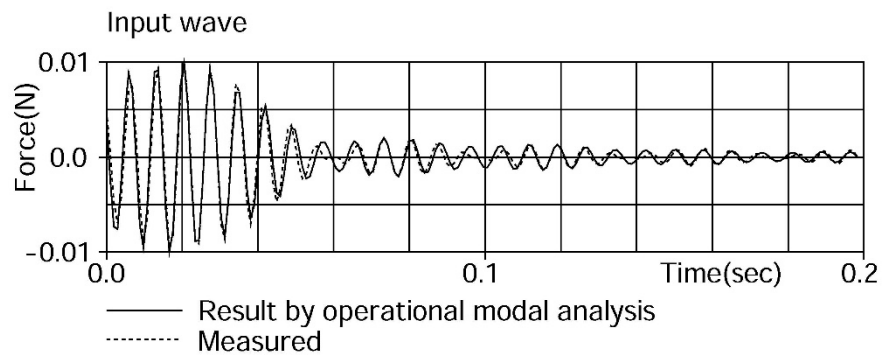


図 4-3 外力の比較

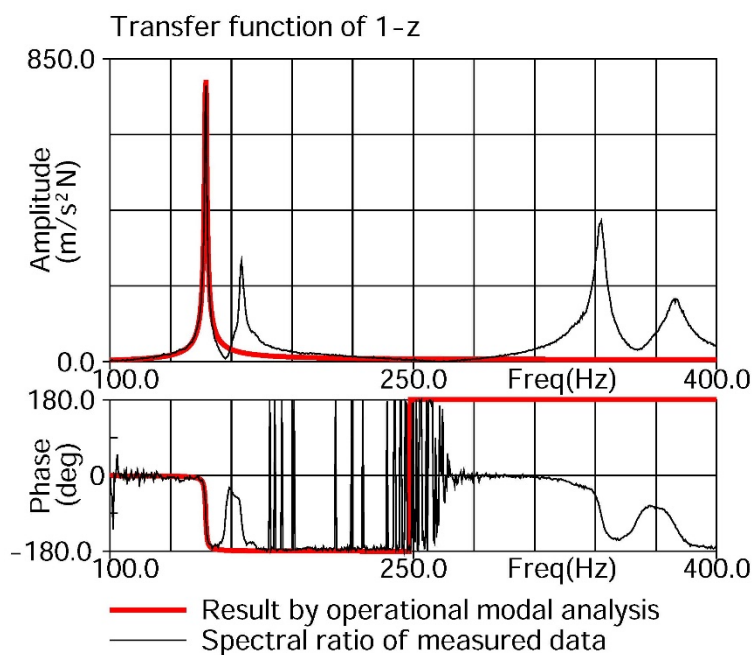


図 4-4 MP1-z の伝達関数の比較

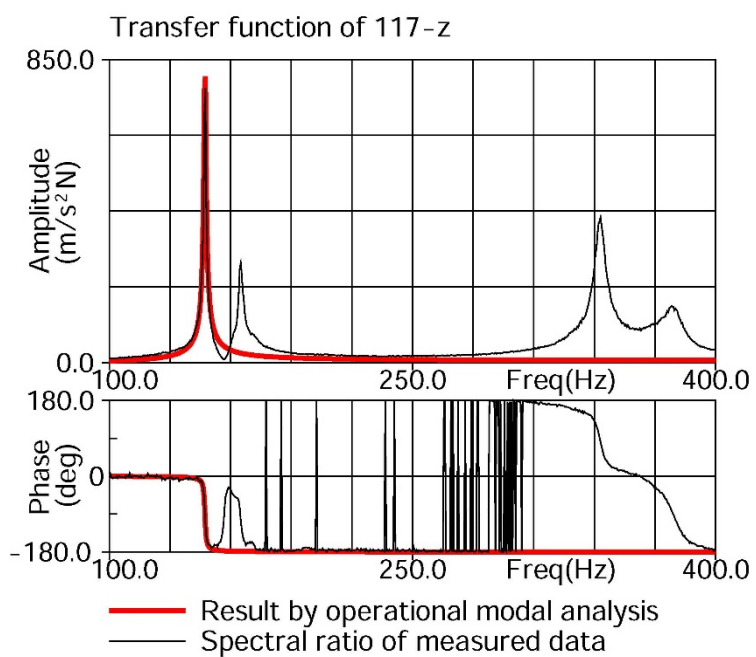


図 4-5 MP117-z の伝達関数の比較

(2) 第2次モード：BPFが160Hz～180Hzの場合

解析から求められた固有周波数および減衰定数は表1のNo.2の値です。第2次モードによる加速度応答波形を計測された波形とともに図5-1、2に、推定された外力の波形と実際に計測された波形との比較図を図5-3にそれぞれ示します。いずれも結果は良好です。図5-4、5に示した伝達関数も解析対象範囲内で良く再現されています。

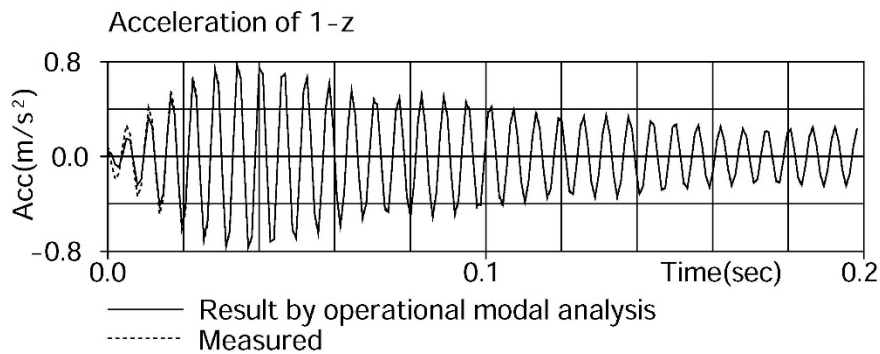


図5-1 MP1-zの加速度応答の比較

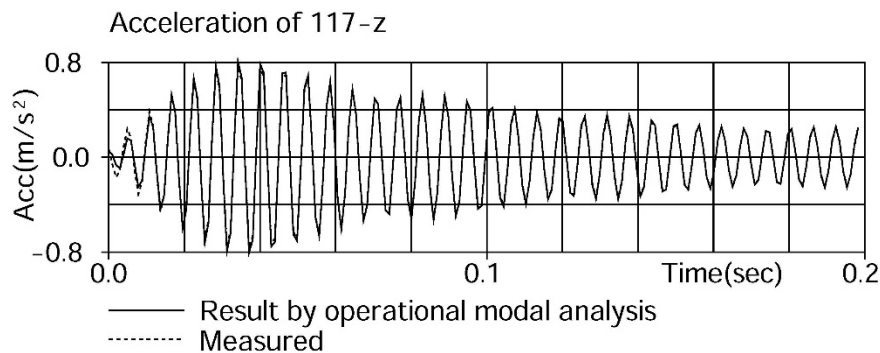


図5-2 MP117-zの加速度応答の比較

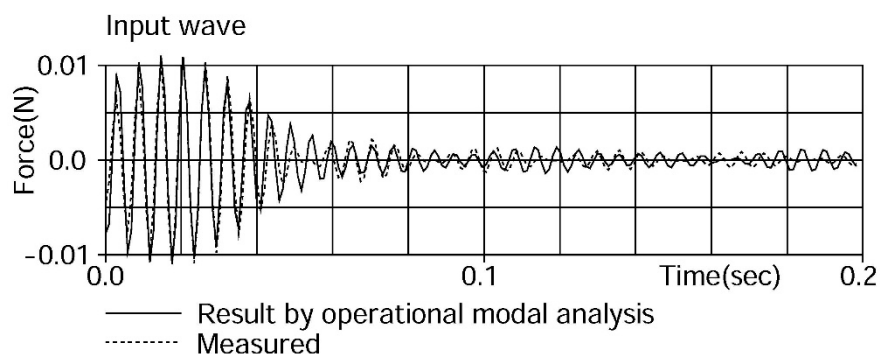


図5-3 外力の比較

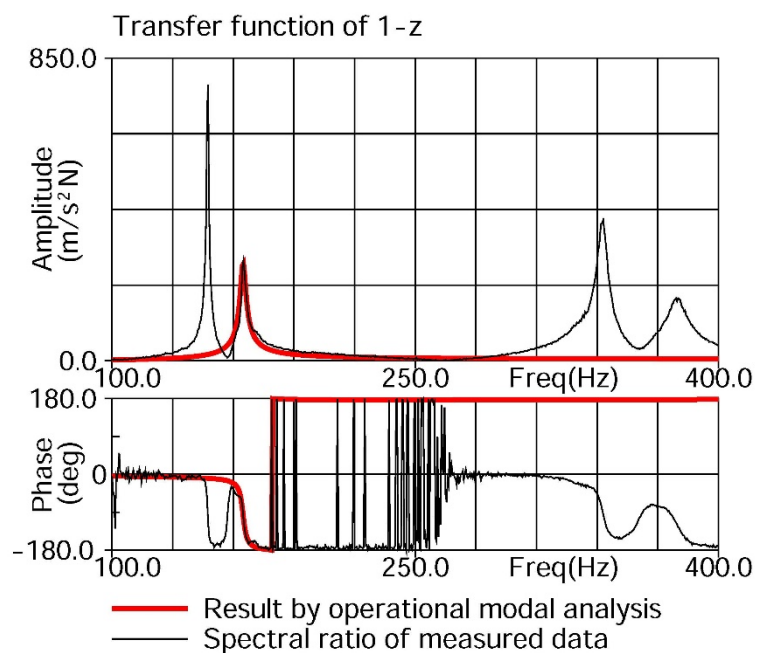


図 5-4 MP1-z の伝達関数の比較

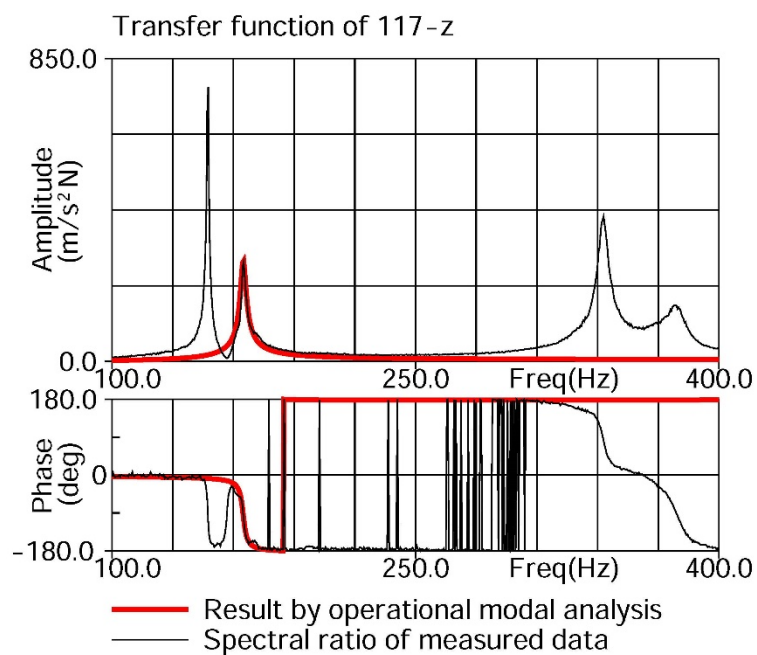


図 5-5 MP117-z の伝達関数の比較

(3) 第3次モード：BPFが300Hz～330Hzの場合

解析から求められた固有周波数および減衰定数は表1のNo.3の値です。第3次モードによる加速度応答波形を計測された波形とともに図6-1、2に、推定された外力の波形と実際に計測された波形との比較図を図6-3にそれぞれ示します。いずれも結果は良好です。図6-4、5に示した伝達関数も解析対象範囲内で良く再現されています。

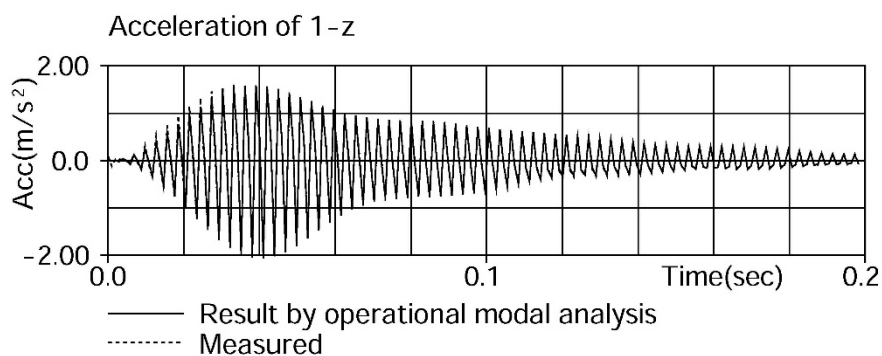


図 6-1 MP1-z の加速度応答の比較

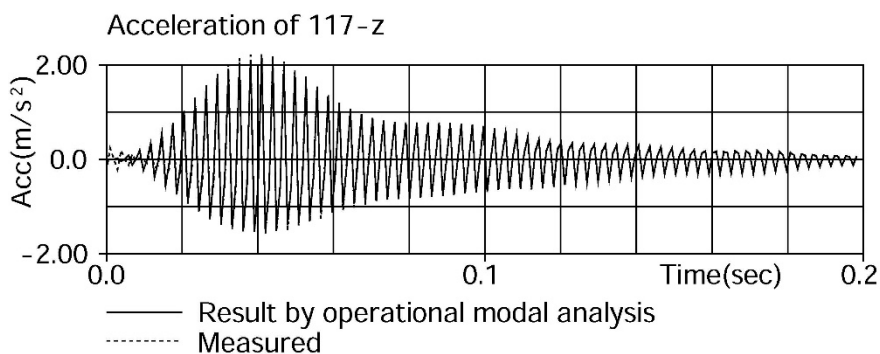


図 6-2 MP117-z の加速度応答の比較

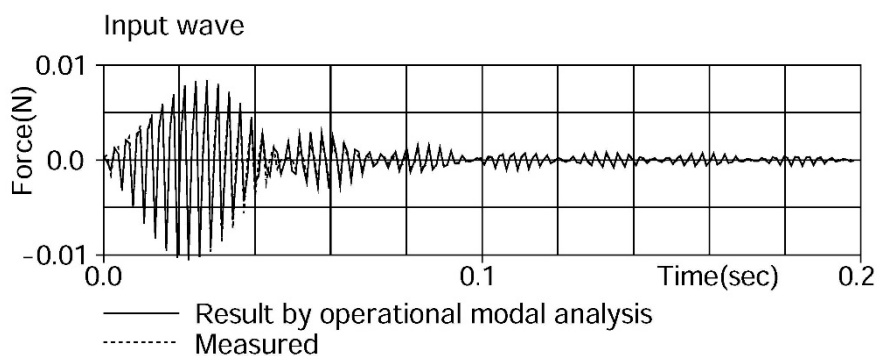


図 6-3 外力の比較

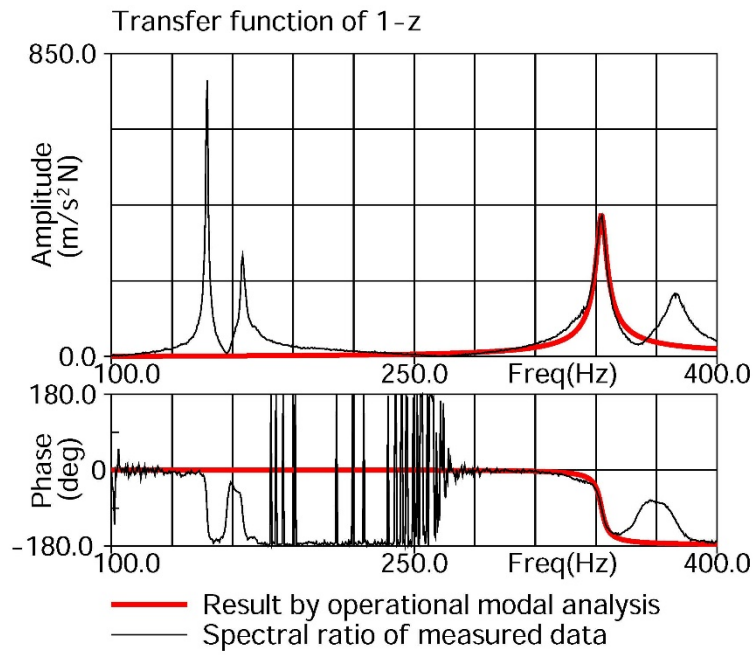


図 6-4 MP1-z の伝達関数の比較

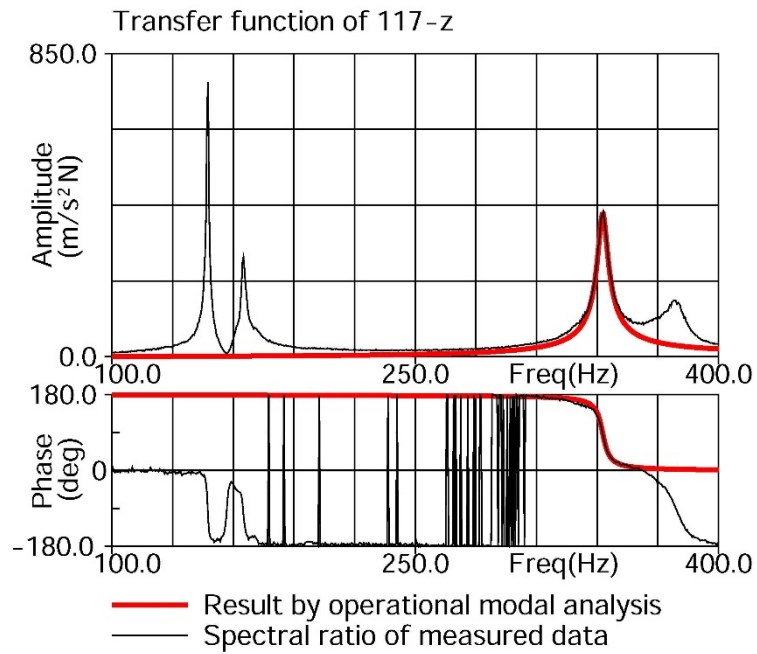


図 6-5 MP117-z の伝達関数の比較

(4) 第4次モード：BPFが350Hz～400Hzの場合

解析から求められた固有周波数および減衰定数は表1のNo.4の値です。第4次モードによる加速度応答波形を計測された波形とともに図7-1、2に、推定された外力の波形と実際に計測された波形との比較図を図7-3にそれぞれ示します。いずれも結果は良好です。図7-4、5に示した伝達関数も解析対象範囲内で良く再現されています。

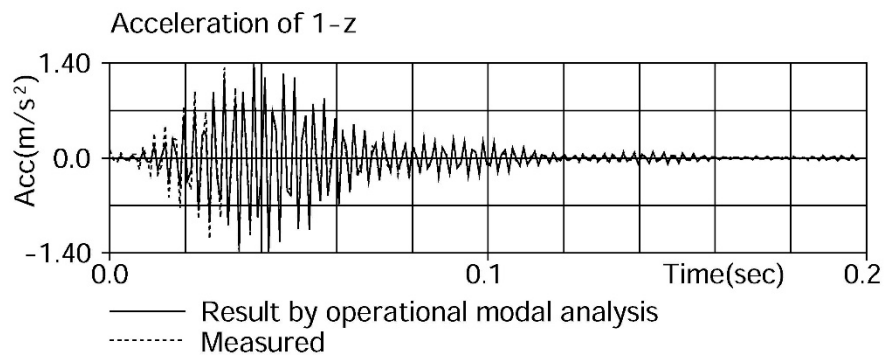


図 7-1 MP1-z の加速度応答の比較

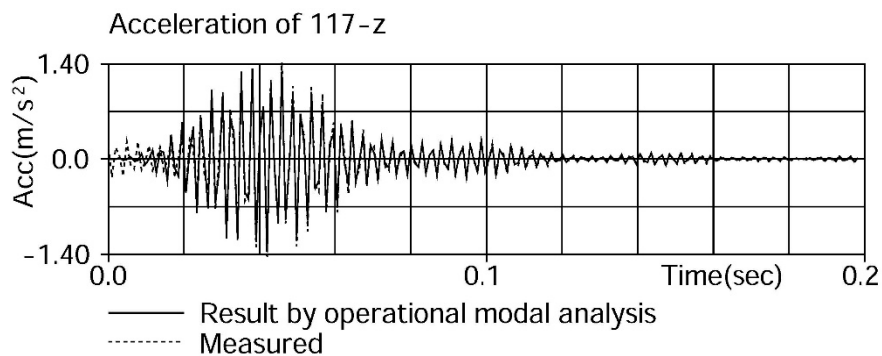


図 7-2 MP117-z の加速度応答の比較

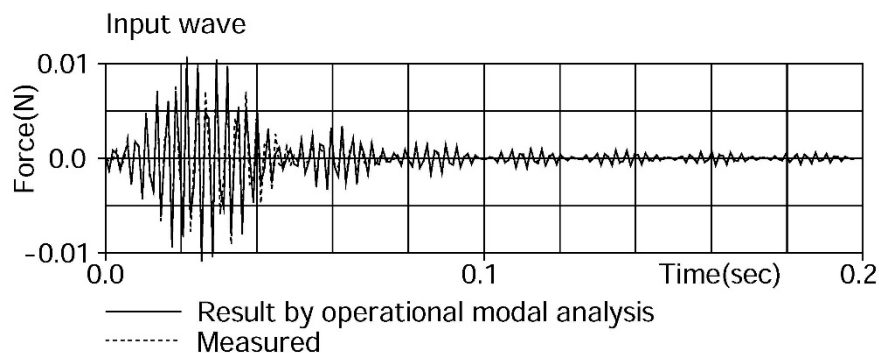


図 7-3 外力の比較

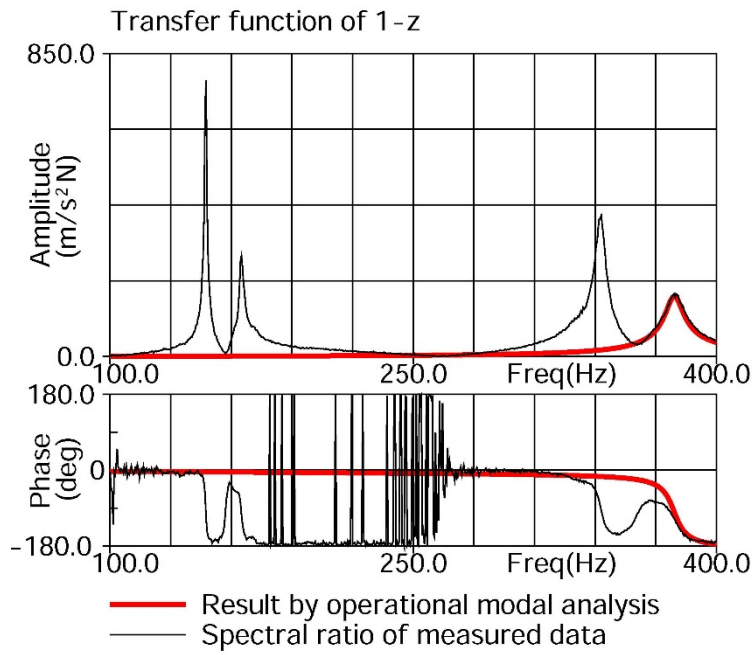


図 7-4 MP1-z の伝達関数の比較

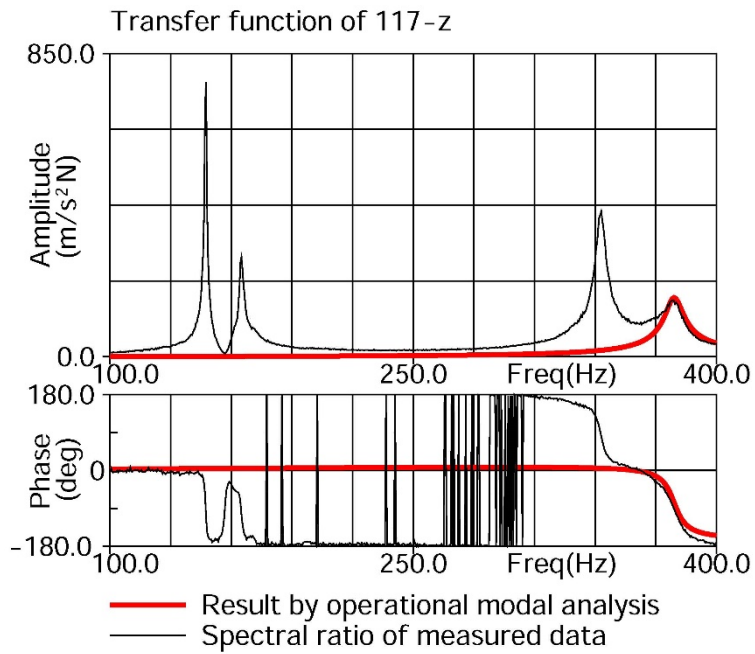


図 7-5 MP117-z の伝達関数の比較

(5) 全てのモードによる SUS 板の動的特性 (BPF が 130Hz~400Hz の場合)

(1)~(4)で求められた 4 個のモードを重ね合わせた結果を示します。ただし、単に各々の応答を加算して求めた結果ではなく、外力について BPF (130Hz~400Hz) を設定して改めて計算して求められた応答です。加速度応答波形を計測された波形とともに図 8-1、2 に、推定された外力の波形と実際に計測された波形との比較図を図 8-3 にそれぞれ示します。結果は良好です。また、図 8-4、5 に示した伝達関数も系の周波数特性を良好に再現しています。

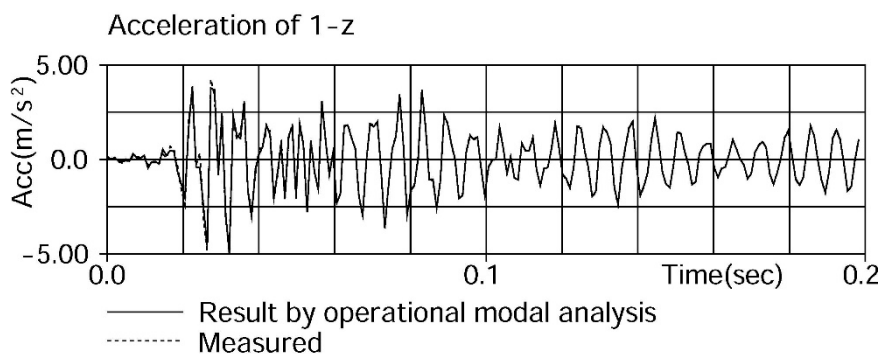


図 8-1 MP1-z の加速度応答の比較

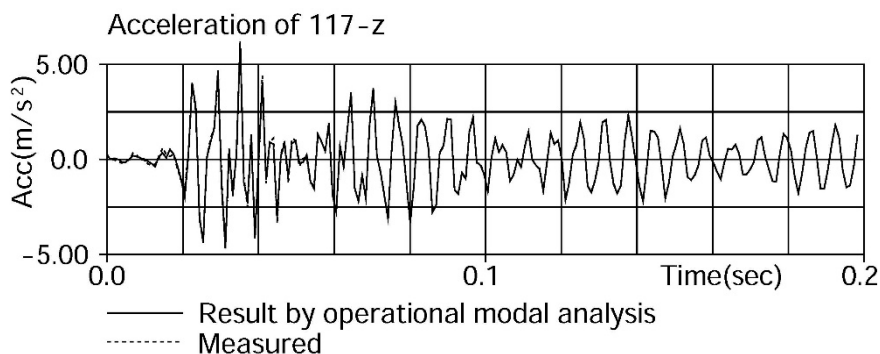


図 8-2 MP117-z の加速度応答の比較

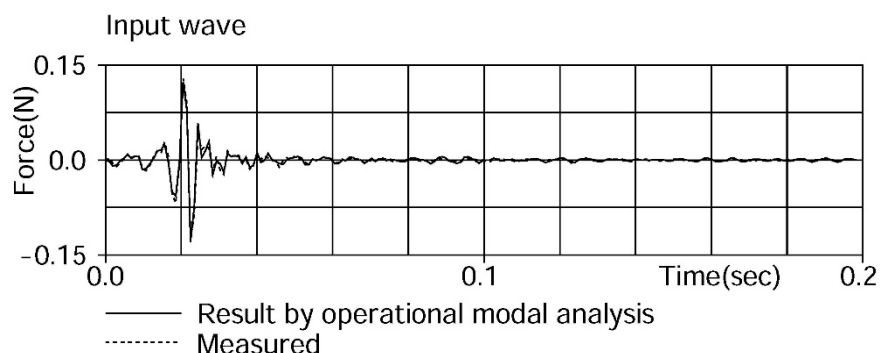


図 8-3 外力の比較

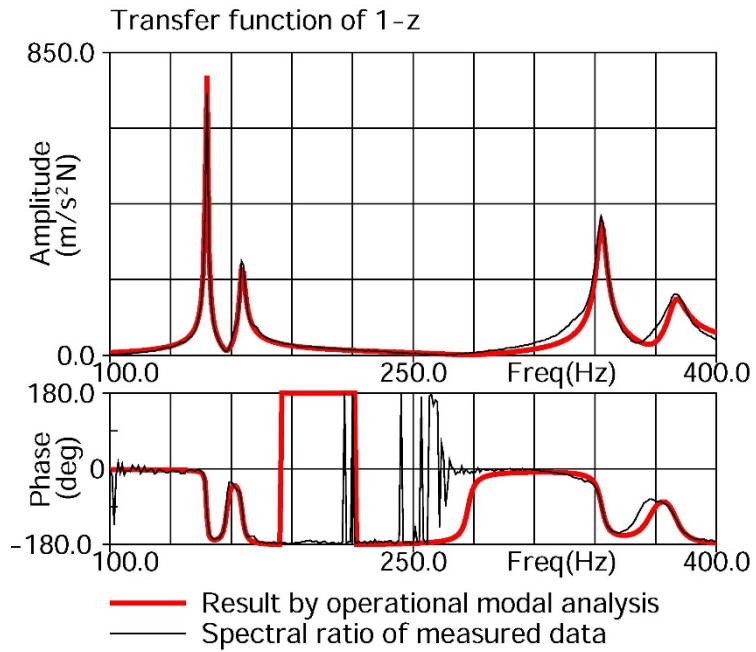


図 8-4 MP1-z の伝達関数の比較

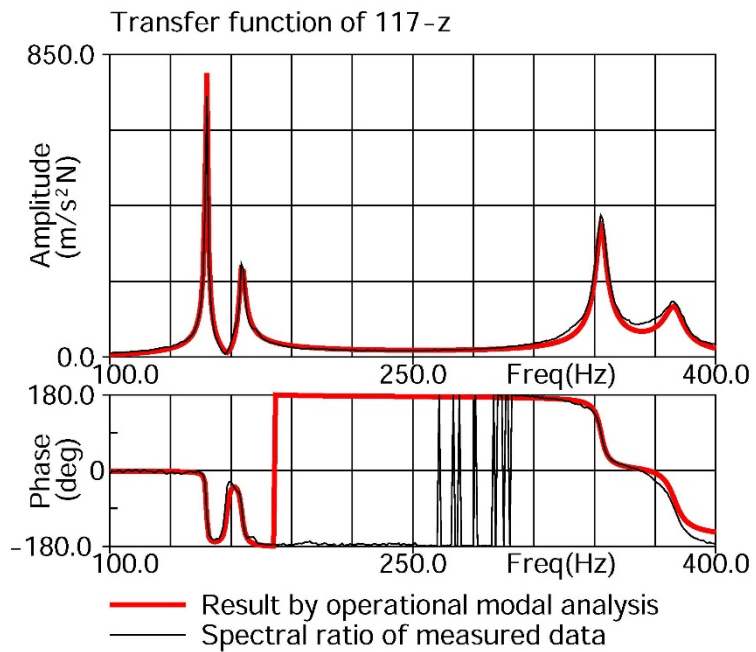


図 8-5 MP117-z の伝達関数の比較

5. おわりに

時間領域の実稼動モード解析は、解析例よりモード定数および外力ともに良好な結果が得られ、出力のみを対象とする解析手法として有効であると考えます。それは、外力と応答記録による、より情報量の多い通常の解析の結果と同様の結果が得られたことから確認されます。

参考文献)

- 1) 安藤幸治, 岩楯敞広: 時間領域のモード解析による振動系の動的特性の同定とその適用, 土木学会論文集, No.450/ I -20, pp.151~160, 1992.7
- 2) 安藤幸治, 岩楯敞広, 小田義也: 数値モデル同定解析手法とその適用, 機械学会年次大会, 2011.9
- 3) 岩楯敞広, 内藤伸幸, 安藤幸治, 小田義也: 東北地方太平洋地震による逗子地域の表層地盤の地震応答特性, 土木学会論文集 A1 特集号地震工学論文集 Vol.33, 2014.6
- 4) 飯山かほり, 栗田哲: 近接モードの影響を考慮したスペクトル分解による FDD 法の理論的背景, 日本建築学会構造系論文集, 78 巻 684 号, 2013.2
- 5) 安藤幸治, 岩楯敞広: 時間領域の実稼動モード解析手法とその適用, 機械学会年次大会, 2017.9
- 6) 安藤幸治, 岩楯敞広: 水平アレー地震観測記録による表層地盤特性の同定とその適用, 一逗子市地域の地盤特性一, 土木学会論文集, No.731 /I-63, pp.213~229, 2003.4
- 7) <http://www.vsdc.co.jp>